УДК 517.98

Группы и геометрии, связанные с дуальными числами [1]

© В. Ф. Молчанов, Н. А. Малашонок, Л. М. Молчанова

Ключевые слова: алгебры, дробно-линейные функции, аффинные связности, геодезические, обобщенные функции, движение планет

Рассматриваются некоторые геометрические, аналитические и механические задачи на многообразиях, связанных с алгеброй дуальных чисел

В настоящей работе мы рассматриваем некоторые геометрические, аналитические и механические задачи на многообразиях, связанных с алгеброй дуальных чисел $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = 0$. Переход в классических задачах от комплексных чисел к дуальным числам приводит к интересным, а иногда и неожиданным результатам [8, 9]. Например, инвариантные аффинные связности на некоторых многообразиях – в отличие от комплексного случая – зависят от вещественных параметров. Для многообразий и групп Ли этот переход означает стягивание (contraction) в смысле Вигнера–Иноню, например, полупростые группы превращаются в полупрямые произведения полупростых групп и линейных пространств. Это дает новый подход к изучению полупрямых произведений групп Ли и их представлений.

§ 1. Дуальные числа

Дуальными числами называются символы $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Действия над ними производятся как над многочленами от i с соотношением $i^2 = 0$, см, например, [13]. Мы используем обычные названия и обозначения: вещественные числа x и y – это соответственно вещественная и мнимая части дуального числа $z = x + iy$, мы пишем $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. Множество $\mathbf{\Lambda}$ дуальных чисел есть алгебра над $\mathbb{R}$ размерности два. Она имеет делители нуля, это – числа it, $t \in \mathbb{R}$, лежащие на мнимой оси.

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.1.1.2.1474 и Темпланом 1.5.07.

Отображение $z \mapsto \mathrm{Re} z$ является гомоморфизмом алгебры $\mathbf{\Lambda}$ на алгебру $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Определим показательную функцию e^z (или $\exp z$) на $\mathbf{\Lambda}$ с помощью такого же степенного ряда, что и для комплексных чисел:

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots .$$

Ряд сходится во всей плоскости $\mathbf{\Lambda}$. В частности,

$$\mathrm{e}^{it} = 1 + it.$$

Справедлива та же формула умножения, что и для комплексных чисел:

$$\mathrm{e}^z \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}.$$

Мультипликативная группа $\mathbf{\Lambda}^*$ алгебры $\mathbf{\Lambda}$ состоит из чисел $z = x + iy$, для которых $x \neq 0$. Дуальное число z из $\mathbf{\Lambda}^*$ можно записать в показательной форме (с "модулем" x и "аргументом" $\varphi = y/x$):

$$z = x\mathrm{e}^{i\varphi} = x(1 + i\varphi), \ \varphi = y/x. \tag{1.1}$$

Группа автоморфизмов алгебры $\mathbf{\Lambda}$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{R}^*$ вещественных чисел: числу $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, отвечает автоморфизм $x + iy \mapsto x + i\mu y$. В частности, числу $\mu = -1$ отвечает инволютивный автоморфизм - переход от $z = x + iy$ к сопряженному числу $z = x - iy$.

Определим стереографическую проекцию для плоскости дуального переменного. Рассмотрим трёхмерное вещественное пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами ξ, η, ζ. Возьмем в нем цилиндр Ω (прямой круговой цилиндр радиуса 1 с осью $O\eta$), задаваемый уравнением

$$\xi^2 + \zeta^2 = 1.$$

Отобразим $\mathbf{\Lambda}$ в Ω с помощью центрального проектирования из точки $\omega^0 = (0,0,1)$, совместив плоскость $\xi O \eta$ с плоскостью xOy (с плоскостью $\mathbf{\Lambda}$). Это отображение назовём стереографической проекцией. Оно задаётся формулами:

$$\xi = \frac{2x}{1+x^2}\,, \ \eta = \frac{2y}{1+x^2}\,, \ \zeta = \frac{x^2-1}{x^2+1}\,. \tag{1.2}$$

Образ отображения (1.2) есть Ω без верхней образующей $\ell = (0, \eta, 1)$. Стереографическая проекция – взаимно однозначное отображение. Обратное отображение задаётся формулами:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}\,, \ y = \frac{\eta}{1-\zeta}\,, \tag{1.3}$$

так что

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}\,. \tag{1.4}$$

Назовем цилиндр Ω *расширенной плоскостью дуального переменного* и обозначим $\overline{\mathbf{\Lambda}}$.

Сечение цилиндра Ω плоскостью $a\xi + b\eta + c\zeta = d$ при стереографической проекции переходит в кривую

$$(c-d)x^2 + 2ax + 2by = c + d. \tag{1.5}$$

Назовем по аналогии с комплексным случаем кривую (1.5) "обобщенной окружностью". В общем случае ($c \neq d, b \neq 0$) это – парабола. Если плоскость проходит через ω^0 и $b \neq 0$, то это – прямая (не вертикальная). Если $b = 0$ и плоскость пересекает Ω, то это – одна ($c = d$) или две ($c \neq d$) вертикальные прямые.

§ 2. Аналитические функции

Мы рассматриваем функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ на $\mathbf{\Lambda}$ со значениями в $\mathbf{\Lambda}$. Производная определяется обычным образом. Уравнения Коши-Римана таковы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

Следовательно, аналитическая функция есть

$$f(z) = \varphi(x) + i\left[\varphi'(x)y + \psi(x)\right] \tag{2.1}$$

с дифференцируемыми $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Производная d/dz действует как d/dx, так что если функции f отвечает пара φ, ψ, то функции f' отвечает пара φ', ψ', если φ дважды дифференцируема. Матрица Якоби отображения $z \mapsto f(z)$ есть

$$\begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ \varphi'' y + \psi' & \varphi' \end{pmatrix}.$$

Поэтому угловой коэффициент $y'(t)/x'(t)$ кривой $z(t) = x(t) + iy(t)$ при отображении $z \mapsto f(z)$ изменяется на число $(\varphi'' y + \psi')/\varphi'$. Мы видим, что *разность* угловых коэффициентов кривых в точке пересечения не изменяется. Назовем мерой угла (с направлением) между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ разность $k_1 - k_2$ их угловых коэффициентов. Мерой угла (с направлением) между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения с абсциссой x_0 назовем меру угла между их касательными, то есть $f_1'(x_0) - f_2'(x_0)$. Таким образом, аналитическая функция является конформным отображением: она сохраняет углы между кривыми.

В частности, показательная функция e^z - аналитическая:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x + i\mathrm{e}^x y,$$

ее производная равна ей самой.

Некоторые применения аналитических функций см. в § 10.

§ 3. Группа Лагерра

Группа Лагерра $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{\Lambda})$ состоит из матриц второго порядка над алгеброй $\mathbf{\Lambda}$ с определителем единица:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{\Lambda}$, эти числа мы будем записывать в виде: $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ и т. д. Группа G есть полупрямое произведение группы $L = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{l}$. В самом деле, матрицу $g \in G$ можно представить в виде произведения

$$g = g_1 n,$$

где $g_1 = \mathrm{Re}\, g$, $n = E + iX$, $\mathrm{tr}\, X = 0$ (так что $X \in \mathfrak{l}$. Группа L действует на алгебре Ли $\mathfrak{l}$ присоединенным образом. О группе Лагерра и ее представлениях см., например, [7].

Центр группы G состоит из двух матриц $\pm E$, фактор-группа $\widetilde{G}$ группы G по ее центру есть полупрямое произведение группы $\widetilde{L} = \mathrm{SO}_0(1,2)$ и ее алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{l}}$. Явный вид матриц $\widetilde{g}$ из $\widetilde{G}$ дается следующей конструкцией.

Рассмотрим пространство H "эрмитовых" матриц

$$\begin{pmatrix} h_1 - h_4 & -ih_2 + h_3 \\ ih_2 + h_3 & h_1 + h_4 \end{pmatrix}, \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{3.1}$$

где $h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{R}$. Группа G действует на H следующим образом:

$$h \mapsto \overline{g}' h g, \tag{3.2}$$

штрих означает матричное транспонирование. Это действие сохраняет определитель матрицы h:

$$\det h = h_1^2 - h_3^2 - h_4^2. \tag{3.3}$$

Сопоставим матрице h, см. (3.1), вектор-*строку* $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ из $\mathbb{R}^4$. Преобразованию (3.2) пространства H отвечает линейное преобразование

$$h \mapsto h\widetilde{g} \tag{3.4}$$

пространства $\mathbb{R}^4$ с матрицей

$$\widetilde{g} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2}{2} & u_1 & \alpha_1\beta_1 + \gamma_1\delta_1 & \dfrac{-\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 + \delta_1^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\delta_1 & u_3 & \alpha_1\delta_1 + \beta_1\gamma_1 & -\alpha_1\gamma_1 + \beta_1\delta_1 \\ \dfrac{-\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2}{2} & u_4 & -\alpha_1\beta_1 + \gamma_1\delta_1 & \dfrac{\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2 + \delta_1^2}{2} \end{pmatrix},$$

где

$$
\begin{aligned}
u_1 &= p_1 + p_2, \\
u_4 &= -p_1 + p_2, \\
p_1 &= -\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2, && (3.5)\\
p_2 &= -\gamma_1\delta_2 + \delta_1\gamma_2, && (3.6)\\
u_3 &= -2\alpha_1\delta_2 + 2\beta_1\gamma_2. && (3.7)
\end{aligned}
$$

Линейные преобразования (3.4) пространства $\mathbb{R}^4$ сохраняют квадратичную форму (3.3) и, следовательно, сохраняют конус $h_1^2 - h_3^2 - h_4^2 = 0$. Орбитами группы $\widetilde{G}$ на этом конусе служат две его полы: $\mathcal{C}^+ = \{h_1 > 0\}$ и $\mathcal{C}^- = \{h_1 < 0\}$, – и каждая из точек на оси Oh_2.

Рассмотрим в G три подгруппы G_1, G_2, G_3, состоящие соответственно из матриц

$$
d = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}. \tag{3.8}
$$

Используя стандартные обозначения, мы можем обозначить $G_2 = \mathrm{SU}(2; \mathbf{\Lambda})$ и $G_3 = \mathrm{SU}(1,1; \mathbf{\Lambda})$. Это группы "унитарных" и "псевдо-унитарных" матриц над дуальными числами. Пусть в (3.8) $a = \alpha + ip$, $b = \beta + iq$. Тогда $\alpha^2 = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ соответственно для d, u и v; и матрицам u и v отвечают в $\widetilde{G}$ матрицы

$$
\widetilde{d} = \begin{pmatrix}
1 + \dfrac{\beta^2}{2} & \alpha q + \beta p & \alpha\beta & -\dfrac{\beta^2}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
\alpha\beta & 2\alpha p & 1 & -\alpha\beta \\
\dfrac{\beta^2}{2} & \alpha q + \beta p & \alpha\beta & 1 - \dfrac{\beta^2}{2}
\end{pmatrix},
$$

$$
\widetilde{u} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2\alpha p + 2\beta q & \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\
0 & 2\alpha q - 2\beta p & -2\alpha\beta & \alpha^2 - \beta^2
\end{pmatrix}, \tag{3.9}
$$

$$\widetilde{v} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & -2\alpha q + 2\beta p & 2\alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha\beta & 2\alpha p - 2\beta q & \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что группа G_2 изоморфна группе евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$ (сохраняющих сумму квадратов), а группа G_3 изоморфна группе гиперболических движений плоскости $\mathbb{R}^2$ (сохраняющих разность квадратов).

§ 4. Дробно-линейные преобразования

Группа G действует на плоскости $\mathbf{\Lambda}$ дробно-линейно:

$$z \mapsto w = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}. \tag{4.1}$$

Функция (4.1) – аналитическая. Разделим в (4.1) вещественные и мнимые части: пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha_1 x + \gamma_1}{\beta_1 x + \delta_1}, \\ v &= \frac{y + p_1 x^2 + u_3 x + p_2}{(\beta_1 x + \delta_1)^2}, \end{aligned}$$

где p_1, p_2, u_3 даются формулами (3.5), (3.6), (3.7). Мы видим, что функция (4.1) определена на всей плоскости $\mathbf{\Lambda}$ при $\beta_1 = 0$ и на всей плоскости $\mathbf{\Lambda}$, кроме вертикальной прямой $x = -\alpha_1/\beta_1$, при $\beta_1 \neq 0$.

Дробно-линейные функции (4.1) сохраняют "обобщенные окружности". Области транзитивности – 1) параболы и невертикальные прямые, 2) пары вертикальных прямых, 3) вертикальные прямые.

С помощью формул (1.2), (1.3), (1.4) дробно-линейное действие (4.1) распространяется на цилиндр Ω.

Рассмотрим три сечения Γ_1, Γ_2 и Γ_3 конуса $\mathcal{C}^+$.

Сечение Γ_1 состоит из точек $c \in \mathcal{C}^+$ таких, что $c_1 + c_4 = 1$. Всякая точка $c \in \Gamma_1$ имеет вид

$$c = \left(\frac{1+x^2}{2},\ y,\ x,\ \frac{1-x^2}{2} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Действие (3.4) вызывает следующее действие группы G (или $\widetilde{G}$) на Γ_1:

$$c \mapsto \frac{c\widetilde{g}}{(c\widetilde{g})_1 + (c\widetilde{g})_4} \tag{4.3}$$

(сначала действуем на c по (3.4), получаем $c\widetilde{g}$, затем эту точку $c\widetilde{g}$ отображаем в точку, лежащую на той же образующей конуса.

Отождествим Γ_1 с $\mathbf{\Lambda}$: сопоставим точке $z = x + iy$ точку $c \in \Gamma_1$, см. (4.2). Тогда действие (4.3) есть в точности дробно-линейное действие (4.1).

Сечение Γ_2 состоит из точек $\omega \in \mathcal{C}^+$ таких, что $\omega_1 = 1$, так что $\omega_3^2 + \omega_4^2 = 1$. Действие (3.4) вызывает следующее действие группы G на Γ_2:

$$\omega \mapsto \frac{\omega\widetilde{g}}{(\omega\widetilde{g})_1} \tag{4.4}$$

Сечение Γ_2 отождествляем с цилиндром Ω: точке (ξ, η, ζ) из Ω сопоставляем точку $(1,\, \eta,\, \xi, -\zeta)$ из Γ_2. Тогда действие (4.4) есть в точности действие группы $\widetilde{G}$ на цилиндре Ω .

Отображение Γ_2 на Γ_1 вдоль образующих конуса $\mathcal{C}^+$ есть как раз стереографическая проекция из § 1.

Сечение Γ_3 состоит из точек $\lambda \in \mathcal{C}^+$ таких, что $\lambda_4 = 1$, так что $\lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 1$, следовательно, сечение Γ_3 есть гиперболический цилиндр (образующая – одна из ветвей гиперболы). При отображении Γ_3 на Γ_1 вдоль образующих конуса $\mathcal{C}^+$ и последующем отождествлении Γ_1 с $\mathbf{\Lambda}$ мы получаем на плоскости $\mathbf{\Lambda}$ множество точек

$$z = \frac{\lambda_3 + i\lambda_2}{\lambda_1 + 1}\,.$$

Поскольку $\lambda_1 \geqslant 1$, это множество есть полоса $-1 < x < 1$, ниже, в § 9, оно появляется под именем плоскости Лобачевского–Галилея $\mathcal{L}$. При отображении Γ_3 на Γ_2 вдоль образующих конуса $\mathcal{C}^+$ получаем нижнюю половину цилиндра Ω: множество $\zeta < 0$. Проектируя это множество на плоскость $\xi O \eta$ вдоль оси $O\zeta$, мы снова получаем такую же полосу $-1 < \xi < 1$. Это – модель Клейна плоскости Лобачевского–Галилея: точке $z = x + iy$ из $\mathcal{L}$ сопоставляется точка $w = u + iv$ тоже из $\mathcal{L}$ – по формулам:

$$u = \frac{2x}{1+x^2}\,, \quad v = \frac{2y}{1+x^2}\,,$$

то есть

$$w = \frac{2z}{1+z\overline{z}}\,.$$

Подгруппы G_1, G_2 и G_3 сохраняют при действии (3.2) соответственно сечения Γ_1, Γ_2 и Γ_3 конуса $\mathcal{C}^+$, при этом действие (3.4) каждой подгруппы является линейным и транзитивным.

Конструкции § 3 и § 4 аналогичны конструкциям в случае комплексных чисел. Для комплексных чисел группа G есть группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, группа $\widetilde{G}$ есть группа $\mathrm{SO}_0(1,3)$, конус $\mathcal{C}$ есть прямой круговой конус в пространстве Минковского

$-+++$, задаваемый уравнением $h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 = 0$, его пола $\mathcal{C}^+$ выделяется условием $h_1 > 0$, сечения Γ_2 и Γ_3 – это соответственно сфера Ω в $\mathbb{R}^3$ (сфера Римана) и плоскость Лобачевского (верхняя пола двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$), сечение Γ_1 отождествляется с алгеброй $\mathbb{C}$ комплексных чисел, отображение Γ_2 на Γ_1 вдоль образующих конуса $\mathcal{C}^+$ есть обычная стереографическая проекция $\Omega \to \mathbb{C}$ сферы на плоскость.

§ 5. Однородные обобщенные функции

В этом параграфе мы даем описание всех однородных обобщенных функций на алгебре $\mathbf{\Lambda}$, мы опираемся на [10]. Для алгебр $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ это было сделано в [6] и [5], соответственно. Вообще, изучение однородных обобщенных функций на алгебрах над $\mathbb{R}$ – это интересная и полезная задача. Она появляется, например, при исследовании представлений матричных групп над такими алгебрами.

Нам понадобится результат для $\mathbb{R}$, см. [6]. Мы используем следующие обобщенные функции на вещественной прямой: x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, x^{-m-1}, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Для характера мультипликативной группы $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ мы используем обозначение

$$t^{\lambda,\varepsilon} = |t|^\lambda \operatorname{sgn}^\varepsilon t,$$

где $t \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0,\ 1$. В частности, если $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \equiv \lambda$, то $t^{\lambda,\varepsilon} = t^\lambda$ (знак $\equiv$ обозначает сравнение по модулю 2). Тем же самым символом $x^{\lambda,\varepsilon}$ мы обозначаем обобщенную функцию $|x|^\lambda \operatorname{sgn}^\varepsilon x$. Обобщенная функция f на $\mathbb{R}$ называется однородной степени (λ, ε), где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0,\ 1$, если

$$f(tx) = t^{\lambda,\varepsilon} f(x).$$

Для данных λ, ε пространство таких обобщенных функций одномерно. Базис есть $x^{\lambda,\varepsilon}$, за исключением $\lambda = -m-1$, $\varepsilon \equiv m$, $m \in \mathbb{N}$, когда базис есть $\delta^{(m)}(x)$, производная m-го порядка дельта-функции Дирака $\delta(x)$ на вещественной прямой. Таким образом, носитель однородной обобщенной функции степени (λ, ε) есть $\mathbb{R}$, за исключением $\lambda = -m-1$, $\varepsilon \equiv m$, $m \in \mathbb{N}$, когда он есть точка 0.

Для многообразия M через $\mathcal{D}(M)$ обозначается пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций на M со знначениями в $\mathbb{C}$ и компактным носителем, снабженное обычной топологией, через $\mathcal{D}'(M)$ – пространство обобщенных функций на M – линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

Характер мультипликативной группы $\mathbf{\Lambda}^*$ алгебры $\mathbf{\Lambda}$ – это непрерывный гомоморфизм этой группы в мультипликативную группу $\mathbb{C}^*$ комплексных чисел. Как следует из показательной формы (1.1) чисел $a \in \mathbf{\Lambda}^*$, группа $\mathbf{\Lambda}^*$ есть прямое произведение групп $\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{R}$. Отсюда получаем

Теорема 5.1 *Всякий характер группы $\mathbf{\Lambda}^*$ задается параметрами $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, его значение на $a = \alpha + ip \in \mathbf{\Lambda}^*$, равно*

$$\chi_{\lambda,\varepsilon,\mu}(a) = \alpha^{\lambda,\varepsilon} \mathrm{e}^{\mu p/\alpha}.$$

Назовем обобщенную функцию F на $\mathbf{\Lambda}$, то есть $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{\Lambda})$, *однородной степени* $(\lambda, \varepsilon, \mu)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, если

$$F(az) = \chi_{\lambda,\varepsilon,\mu}(a)F(z), \ \ a \in \mathbf{\Lambda}^*. \tag{5.1}$$

Характер $\chi_{\lambda,\varepsilon,\mu}$ можно рассматривать как обобщенную функцию на плоскости $\mathbf{\Lambda}$ чисел $z = x + iy$ с удаленной мнимой прямой $x = 0$, то есть на множестве $\{x \neq 0\}$. В самом деле, он есть непрерывная функция на этом множестве. Но на всю $\mathbf{\Lambda}$ его можно распространить только в случае, когда комплексное число μ – чисто мнимое, см. [6]. В этом случае он есть локально интегрируемая функция при $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ и распространяется мероморфно по λ на всю комплексную плоскость λ. Оказывается, что это – общая форма однородных обобщенных функций, носитель которых есть вся плоскость $\mathbf{\Lambda}$. А именно, мы имеем следующую теорему.

Теорема 5.2 *Однородная обобщенная функция F на $\mathbf{\Lambda}$ степени $(\lambda, \varepsilon, \mu)$, носитель которой есть вся плоскость $\mathbf{\Lambda}$, существует только для чисто мнимых μ. С точностью до однородных обобщенных функций, сосредоточенных на мнимой прямой $x = 0$ в плоскости $\mathbf{\Lambda}$, она есть $C \cdot \chi_{\lambda,\varepsilon,\mu}$ (следовательно, если $\lambda = -m - 1$, $m \in \mathbb{N}$, то должно быть $\varepsilon \equiv m$).*

Доказательство. Пусть в (5.1) $a = \alpha + ip$ – такое, что $\alpha > 0$. Дифференцируя (5.1) по α и ip и полагая $\alpha = 1$, $p = 0$, мы получаем следующую систему

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} \ = \ \lambda F, \tag{5.2}$$

$$x\frac{\partial F}{\partial y} \ = \ \mu F. \tag{5.3}$$

Сначала рассмотрим F на множестве $\{x \neq 0\}$. Тогда из уравнения (5.3) мы получаем, что

$$F = T(x)\,\mathrm{e}^{\mu y/x}.$$

Поэтому уравнение (5.2) дает следующее уравнение для T:

$$x\frac{dT}{dx} = \lambda T,$$

откуда $T = C_1 x_+^\lambda + C_2 x_-^\lambda$. Уравнение (5.1) с $a = -1$ показывает, что $T(x)$ имеет четность ε, так что $T = C \cdot x^{\lambda,\varepsilon}$. Таким образом, на множестве $\{x \neq 0\}$ мы имеем

$$\begin{aligned} F(z) \ &= \ C \cdot x^{\lambda,\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mu y/x} \\ &= \ C \cdot \chi_{\lambda,\varepsilon,\mu}(z). \end{aligned}$$

с произвольным $\mu \in \mathbb{C}$. На всю плоскость $\mathbf{\Lambda}$ эта обобщенная функция распространяется только при чисто мнимом μ. $\square$

Теперь найдем однородные обобщенные функции, сосредоточенные на прямой $x = 0$.

Теорема 5.3 *Однородная обобщенная функция F на $\mathbf{\Lambda}$ степени $(\lambda, \varepsilon, \mu)$, носитель которой есть прямая $x = 0$, существует только для $\mu = 0$. Если $\lambda \neq -n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то (с точностью до множителя)*

$$F = \delta(x)\, y^{\lambda+1,\varepsilon},$$

Если $\lambda = -1$, то

$$\begin{aligned} F &= \delta(x)\,\delta(y), \quad \varepsilon = 0, \\ F &= \delta(x)\,\mathrm{sgn}(y), \quad \varepsilon = 1, \end{aligned}$$

Если $\lambda = -n$, $n = 2, 3, \ldots$, то

$$\begin{aligned} F &= \delta(x)\, y^{-n+1}, \quad \varepsilon \equiv n-1, \\ F &= \delta(x)\,\delta^{(n-2)}(y), \quad \varepsilon \equiv n. \end{aligned}$$

Доказательство. Нам нужно найти решения системы (5.2), (5.3), сосредоточенные на прямой $x = 0$. Достаточно найти такие обобщенные функции (функционалы), действующие на функции φ из $\mathcal{D}(\mathbf{\Lambda})$, носители которых располагаются в круге $x^2 + y^2 < M$. На таких функциях φ всякая обобщенная функция F, сосредоточенная на прямой $x = 0$, имеет вид:

$$F = \sum_{j=0}^{N} \delta^{(j)}(x) A_j(y),$$

где A_j – обобщенные функции на $\mathbb{R}$. Так как

$$x\delta^{(j)}(x) = -j\delta^{(j-1)}(x),$$

то уравнение (5.3) дает

$$-\sum_{j=1}^{N} j\delta^{(j-1)}(x)\frac{dA_j}{dy} = \mu \sum_{j=0}^{N} \delta^{(j)}(x) A_j,$$

или

$$-\sum_{j=0}^{N-1} (j+1)\delta^{(j)}(x)\frac{dA_{j+1}}{dy} = \mu \sum_{j=0}^{N} \delta^{(j)}(x) A_j.$$

Отсюда получаем, что если $\mu \neq 0$, то все A_j равны 0, так что $F = 0$. Если же $\mu = 0$, то $A_j = 0$ при $j \geqslant 1$, так что $F = \delta(x)A_0(y)$. Теперь из уравнения (5.2) получаем

$$y\,\frac{dA_0}{dy} = (\lambda+1)A_0\,,$$

то есть A_0 – однородная обобщенная функция на $\mathbb{R}$ степени $\lambda + 1$. Кроме того, она имеет четность ε. Отсюда следует теорема. $\square$

§ 6. Аффинные связности, ускорение, геодезические

Приведем некоторые сведения об аффинных связностях [11], [12]. *Аффинная связность* на многообразии M – это соответствие ∇ , которое каждому векторному полю X сопоставляет линейное отображение ∇_X пространства векторных полей в себя, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y \tag{6.1}$$

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \tag{6.2}$$

для $f, g \in C^\infty(M)$. Оператор ∇_X называется *ковариантной производной* относительно X.

Пусть M имеет размерность n, пусть $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты. Тогда $\partial/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, – базис в касательном пространстве. Определим функции $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$ (*символы Кристоффеля*) формулой

$$\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Символы Кристоффеля образуют n матриц

$$\nabla_i = \left(\Gamma_{ij}^k\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

(k – номер строки, j – номер столбца).

Пусть Φ – диффеоморфизм многообразия M. Аффинная связность ∇ называется *инвариантной* относительно Φ, если

$$d\Phi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\Phi(X)}\, d\Phi(Y). \tag{6.3}$$

Теорема 6.1 *Пусть Φ в локальных координатах задается функциями $y_k = y_k(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда условие инвариантности относительно Φ имеет вид*

$$\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k,s} \Gamma_{ks}^m(y)\, \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\, \frac{\partial y_s}{\partial x_j} = \sum_p \Gamma_{ij}^p(x)\, \frac{\partial y_m}{\partial x_p}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Условие инвариантности (6.3) равносильно системе

$$d\Phi\left(\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \nabla_{d\Phi(\partial/\partial x_i)}\, d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Поскольку

$$d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k},$$

мы имеем

$$d\Phi\left(\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \sum_m \left(\sum_p \Gamma_{ij}^p(x)\, \frac{\partial y_m}{\partial x_p}\right) \frac{\partial}{\partial y_m}. \tag{6.5}$$

С другой стороны, используя (6.1) и (6.2), мы находим

$$\nabla_{d\Phi(\partial/\partial x_i)} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{m,k} \frac{\partial^2 y_m}{\partial y_k \partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_m} + \sum_{k,s} \Gamma^m_{ks}(y) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_m}. \qquad (6.6)$$

Первое слагаемое в правой части (6.6) можно упростить, оно есть

$$\sum_m \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_m}.$$

После приравнивания коэффициентов при $\partial/\partial y_m$ в правых частях (6.5) и (6.6) мы получим (6.4). □

Пусть на многообразии M действует (диффеоморфизмами) группа Ли G.

Аффинная связность ∇ называется *инвариантной* относительно группы G, если она инвариантна относительно каждого преобразования из этой группы.

Возьмем в G однопараметрическую подгруппу $g(t) = \exp Xt$, где X – элемент из алгебры Ли группы G. В локальных координатах подгруппа $g(t)$ есть подгруппа преобразований

$$y_k = y_k(x_1, \ldots, x_n; t).$$

При $t = 0$ это – тождественное преобразование, матрица Якоби – единичная матрица:

$$y_k\Big|_{t=0} = x_k, \quad \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Big|_{t=0} = \delta_{ki}. \qquad (6.7)$$

Обозначим

$$L^k_i = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \quad M^k_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (6.8)$$

Теорема 6.2 *Аффинная связность ∇ на многообразии M инвариантна относительно группы G тогда и только тогда, когда*

$$M^m_{ij} + \sum_k L^k_i \Gamma^m_{kj} + \sum_s L^s_j \Gamma^m_{is} - \sum_p L^m_p \Gamma^p_{ij} + \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x_k} = 0 \qquad (6.9)$$

для всех точек $x \in M$ и для всех наборов $\{ijm\}$.

Доказательство. Вычислим производную по t при $t = 0$ от обеих частей равенства (6.4). Используя (6.7) и (6.8), получим (6.9). Обратное утверждение получается интегрированием. □

Теорема 6.3 *Для аффинной связности на пространстве $\mathbb{R}^n$, инвариантной относительно группы всех параллельных переносов, символы Кристоффеля постоянны:* $\Gamma^k_{ij} = \mathrm{const}$.

Доказательство. Для параллельного переноса $x \mapsto y = x + a$ матрица Якоби есть единичная матрица. Тогда из (6.4) получаем $\Gamma^m_{ij}(x+a) = \Gamma^m_{ij}(x)$. □

Пусть γ – кривая $x(t)$ на многообразии M, параметр t – время. Скорость – это касательный вектор $\dot{x}(t)$ (точка обозначает производную по t). Пусть a – некоторое векторное поле:

$$a = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\,.$$

Возьмем от поля a ковариантную производную относительно поля $\dot{x}$, получим поле

$$\widetilde{a} = \nabla_{\dot{x}} a,$$

в координатах

$$\widetilde{a}_k = \dot{a}_k + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} \dot{x}_i a_j\,.$$

Векторное поле a называется параллельным вдоль кривой γ (или: вектор a переносится параллельно вдоль кривой γ), если $\widetilde{a} = 0$, в координатах:

$$\dot{a}_k + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} \dot{x}_i a_j = 0. \tag{6.10}$$

С другой стороны, $a(t)$ – векторное поле вдоль кривой γ. Определим производную этого поля вдоль γ следующей конструкцией. Перенесем вектор $a(s)$ параллельно вдоль кривой γ из точки $x(s)$ в точку $x(t)$. Получим поле $b(t,s)$, зависящее от двух параметров t, s. Оно параллельно вдоль кривой γ при фиксированном s, то есть удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} \dot{x}_i b_j = 0, \tag{6.11}$$

и удовлетворяет граничному условию

$$b(s,s) = a(s). \tag{6.12}$$

В точке $x(t)$ получаем два вектора: $b(t,s)$ и $a(t) = b(t,t)$. Разность $b(t,s) - b(t,t)$ показывает, насколько "повернулся" вектор из поля a за время от t до s. Производная ("мгновенный поворот")

$$\left.\frac{\partial b}{\partial s}\right|_{(t,t)} = \lim_{s\to t} \frac{b(t,s) - b(t,t)}{s-t}$$

и есть производная поля a вдоль γ.

Теорема 6.4 *Производная поля a вдоль γ есть в точности ковариантная производная:.*

$$\left.\frac{\partial b}{\partial s}\right|_{s=t} = \nabla_{\dot{x}} a.$$

Доказательство. Продифференцируем (6.12) по s и положим $s = t$, получим:

$$\left.\frac{\partial b_k}{\partial t}\right|_{(t,t)} + \left.\frac{\partial b_k}{\partial s}\right|_{(t,t)} = \dot{a}_k(t).$$

Первое слагаемое выразим из (6.11), получим

$$\left.\frac{\partial b_k}{\partial s}\right|_{(t,t)} = \dot{a}_k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i b_j\,.$$

В правой части стоит как раз $(\nabla_{\dot{x}} a)_k$. $\square$

В частности, определим *ускорение* $\widehat{x}(t)$ на кривой $x(t)$ как производную скорости $\dot{x}(t)$ вдоль этой же кривой $x(t)$. По доказанной теореме имеем

$$\widehat{x} = \nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \tag{6.13}$$

в координатах:

$$\widehat{x}_k = \ddot{x}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j. \tag{6.14}$$

Кривая называется *геодезической*, если ускорение равно нулю, то есть $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$. В координатах геодезическая задается уравнением

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0.$$

§ 7. Геометрия на плоскости дуального переменного

Мы рассматриваем плоскость $\mathbf{\Lambda}$ с группой движений $z \mapsto az + b$, где $a = e^{ip}$, $p \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbf{\Lambda}$. Она порождается параллельными переносами $z \mapsto z + b$ и "поворотами на угол p": $z \mapsto e^{ip}z$ (косые деформации вдоль оси ординат). Эта группа движений изоморфна группе G_1, в самом деле, отображение $z \mapsto e^{ip}z + b$ есть дробно-линейное преобразование (4.1) с матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{ip/2} & 0 \\ be^{-ip/2} & e^{-ip/2} \end{pmatrix}.$$

поэтому для этой группы мы сохраним обозначение G_1. Инвариантная (относительно G_1) метрика на Λ вырождена, она есть dx^2. Следовательно, расстояние между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равно $|x_2 - x_1|$. Иногда удобно брать расстояние со знаком, а именно, $x_2 - x_1$.

7.1 *Инвариантные аффинные связности*

Теорема 7.1 *Всякая аффинная связность на* Λ, *инвариантная относительно* G_1, *задается тремя вещественными параметрами* C, D, R *и имеет следующие базисные матрицы*

$$\nabla_{\partial/\partial x} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \nabla_{\partial/\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

где $A = D + R$.

Доказательство. Инвариантность относительно сдвигов $z \mapsto z+b$, $b \in \mathbf{\Lambda}$, дает, в силу теоремы 6.3, что символы Кристоффеля Γ_{ij}^k постоянны.

Рассмотрим теперь "поворот" $w = \mathrm{e}^{it} z$. Дальше в доказательстве для соответствия с § 6 переобозначим: $z = x_1 + ix_2$, $w = y_1 + iy_2$. Тогда поворот есть преобразование

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = tx_1 + x_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1, \ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = t, \ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 1,$$

и потому $L_1^2 = 1$, остальные L_i^k равны нулю. Все вторые частные производные $\partial^2 y_k / \partial x_i \partial x_j$ равны нулю, так что все M_{ij}^m равны нулю. Поэтому система уравнений (6.9) становится следующей системой:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1 = 0, \\ &\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 = 0, \\ &\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 = 0, \\ &\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 = 0, \\ &\Gamma_{22}^1 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ и что $\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^1$. $\square$

Пусть γ – кривая $z(t) = x(t) + iy(t)$ на $\mathbf{\Lambda}$. Возьмем на $\mathbf{\Lambda}$ инвариантную аффинную связность, задаваемую числами C, D, R, пусть $D + R = A$, см. теорему 7.1. Пусть $w(t) = a(t) + i\,b(t)$ – векторное поле, параллельное вдоль γ. По (6.10) имеем

$$\dot a + A\,\dot x\,a = 0, \tag{7.1}$$

$$\dot b + C\,\dot x\,a + D\,\dot x\,b + R\,\dot y\,a = 0 \tag{7.2}$$

Теорема 7.2 *Векторное поле $w(t) = a(t) + i\,b(t)$, параллельное вдоль γ, задается формулами*

$$a(t) = Ke^{-Ax(t)}, \qquad (7.3)$$

$$b(t) = \frac{KC}{R}e^{-Ax(t)} - KRe^{-Dx(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-Rx(\tau)}\dot{y}(\tau)d\tau + Me^{-Dx(t)}, \qquad (7.4)$$

где K, M – некоторые числа.

Доказательство. Уравнение (7.1) сразу дает (7.3). Подставим (7.3) в (7.2), получим дифференциальное уравнение первого порядка. Решая его, получим (7.4). □

7.2 Ускорение, кривизна

Ускорение $\widehat{z} = \widehat{x} + i\widehat{y}$ в соответствии с (6.14) дается формулами

$$\widehat{x} = \ddot{x} + A\dot{x}^2, \qquad (7.5)$$

$$\widehat{y} = \ddot{y} + C\dot{x}^2 + A\dot{x}\dot{y} \qquad (7.6)$$

(мы использовали $D + R = A$), или

$$\widehat{z} = \ddot{z} + A\,\dot{z}\,\mathrm{Re}\,\dot{z} + i\,C\dot{z}^2.$$

Геодезическая (кривая с нулевым ускорением: $\widehat{z} = 0$) определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + A\dot{x}^2 = 0, \\ \ddot{y} + C\dot{x}^2 + A\dot{x}\dot{y} = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим

$$x(t) = \frac{1}{A}\ln(At + H) + G,$$

$$y(t) = -\frac{C}{2A^2}(\ln(At + H) + S)^2,$$

где H, G, S – некоторые числа. Исключая здесь параметр t, мы найдем связь между x и y:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C.$$

Итак, геодезическая на плоскости $\mathbf{\Lambda}$ с группой G_1 есть парабола (при $C \neq 0$):

$$y = -\frac{C}{2}x^2 + \lambda x + \mu, \qquad (7.7)$$

где C – один из параметров аффинной связности, λ, μ – постоянные.

Для определения и вычисления кривизны применим конструкцию из § 6. Пусть γ – кривая $z(t) = x(t) + iy(t)$. Перенесем параллельно вдоль кривой γ вектор скорости $\dot{z}$ из точки $x(s)$ в точку $x(t)$. Получим векторное поле $w(t,s) = u(t,s) + i\,v(t,s)$, зависящее от двух параметров t, s. Оно параллельно вдоль кривой γ при фиксированном s, то есть удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\dot{x}\,u = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + C\dot{x}\,u + D\dot{x}\,v + R\dot{y}\,u = 0$$

и удовлетворяет граничному условию $w(s,s) = \dot{z}(s)$, то есть

$$u(s,s) = \dot{x}(s),\;\; v(s,s) = \dot{y}(s). \tag{7.8}$$

В точке $x(t)$ получаем два вектора: $w(t,s)$ и $\dot{z}(t) = w(t,t)$. Угол между ними равен

$$\frac{v(t,s)}{u(t,s)} - \frac{v(t,t)}{u(t,t)}\,.$$

Разделим этот угол на расстояние $x(s) - x(t)$ между точками $z(s)$ и $z(t)$ и перейдем к пределу при $s \to t$. Этот предел по аналогии с классическим случаем назовем *кривизной* k кривой γ в точке $z(t)$. Получаем

$$k = \lim_{s\to t} \frac{1}{x(s) - x(t)} \left\{ \frac{v(t,s)}{u(t,s)} - \frac{v(t,t)}{u(t,t)} \right\}.$$

Разделим здесь числитель (то есть $\left\{ \frac{v(t,s)}{u(t,s)} - \frac{v(t,t)}{u(t,t)} \right\}$) и знаменатель на $s - t$ и перейдем к пределу, получим

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\dot{x}(t)} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=t} \frac{v(t,s)}{u(t,s)} \\ &= \frac{1}{\dot{x}(t)} \frac{v_s(t,t)u(t,t) - v(t,t)u_s(t,t)}{u^2(t,t)}. \end{aligned}$$

Используя (7.8), получаем следующую формулу для кривизны:

$$k = \frac{v_s(t,t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)u_s(t,t)}{\dot{x}^3(t)}\,. \tag{7.9}$$

С другой стороны, мы знаем, см. теорему 6.4 и формулу (6.13), что $w_s(t,t)$ есть производная скорости $\dot{z}$ вдоль кривой γ, то есть ускорение, следовательно, $u_s(t,t) = \widehat{x}(t)$, $v_s(t,t) = \widehat{y}(t)$. Поэтому формула (7.9) превращается в формулу

$$k = \frac{\widehat{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\widehat{x}}{\dot{x}^3}\,.$$

Подставляя сюда (7.5) и (7.6), получаем

$$k = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} + C,$$

или

$$k = \frac{d^2y}{dx^2} + C.$$

В частности, геодезическая – кривая с нулевой кривизной.

7.3 *Некоторые кривые*

Рассмотрим для плоскости $\mathbf{\Lambda}$ аналоги различных замечательных кривых на евклидовой плоскости. Поскольку метрика на $\mathbf{\Lambda}$ вырождена, естественно исходить из определений, связанных с понятием угла, а не с понятием длины. Это, например, дуга окружности (данный отрезок виден под данным углом), эллипс, гипербола, парабола, логарифмическая спираль и т.д.

Напишем уравнения таких кривых на $\mathbf{\Lambda}$:

два семейства кривых, кривые одного из которых называем гиперболами:

$$\left[y - \frac{C}{2}(a^2 - x^2)\right]^2 = K(x^2 - a^2),$$

а другого - эллипсами:

$$\left[y - \frac{C}{2}(a^2 - x^2)\right]^2 = K(a^2 - x^2);$$

кривая постоянной кривизны k (назовем ее циклом):

$$y = \left(-\frac{C}{2} - \frac{k}{2a}\right)(x^2 - a^2),$$

в частном случае получаем кривую нулевой кривизны – геодезическую,

логарифмическая спираль:

$$y = L\,x\ln x - Cx^2 + Kx,$$

где K и L – некоторые постоянные.

7.4 *Аналог теоремы Гаусса–Бонне*

Пусть L – замкнутый гладкий контур на $\mathbf{\Lambda}$, пробегаемый в положительном направлении и охватывающий область G. Возьмем в какой-нибудь его точке $z_0 = z(t_0)$ вектор и совершим параллельное перенесение этого вектора вдоль контура L. Мы вернемся в точку $z_0 = z(t_1)$ с вектором, повернутым на некоторый угол $\Delta\varphi$ по сравнению с его исходным положением. Найдем этот угол поворота $\Delta\varphi$.

По (7.3) и (7.4) угловой коэффициент вектора после параллельного перенесения вектора вдоль L в точку $z(t)$ есть

$$\varphi(t) = \frac{C}{R} - Re^{Rx_0} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-Rx(\tau)} \dot{y}(\tau) d\tau + \frac{M}{K} \mathrm{e}^{Rx(t)},$$

где M, K – некоторые числа. Следовательно, угловой коэффициент исходного вектора в точке $z(t_0)$ есть

$$\varphi(t_0) = \frac{C}{R} + \frac{M}{K} \mathrm{e}^{Rx_0},$$

а после перенесения в ту же точку $z_0 = z(t_1)$ есть

$$\varphi(t_1) = \frac{C}{R} - Re^{Rx_0} \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{-Rx(\tau)} \dot{y}(\tau) d\tau + \frac{M}{K} e^{Rx_0},$$

так что

$$\Delta\varphi = \varphi(t_1) - \varphi(t_0) = -R \int_L \mathrm{e}^{-R(x-x_0)} dy.$$

Применяя формулу Грина, получим окончательно

$$\Delta\varphi = \int_G R^2 \mathrm{e}^{-R(x-x_0)}\, dx\, dy. \tag{7.10}$$

По аналогии с классической теоремой Гаусса–Бонне мы можем назвать подинтегральную функцию в (7.10) гауссовой кривизной. Заметим, что в отличие от классического случая угол поворота $\Delta\varphi$ *зависит* от начальной точки z_0. С другой стороны, формула (7.10) инвариантна относительно движений из группы G_1 (как и должно быть).

7.5 *Движение планет*

Рассмотрим движение планет на плоскости $\mathbf{\Lambda}$, снабженной инвариантной аффинной связностью с параметрами C, D, R, $D + R = A$, см. теорему 7.1. Мы следуем [2].

Поместим Солнце в начало координат. Движение планеты подчиняется второму закону Ньютона: $F = m\widehat{z}$, где $\widehat{z}$ – ускорение. Для простоты считаем $m = 1$. Сила притяжения F направлена по касательной к геодезической, соединяющей Солнце и планету, находящуюся в точке z. Уравнение этой геодезической см. (7.7). Нормируем касательный вектор τ к ней в точке z так, чтобы его первая координата была равна 1. Тогда (мы исключили λ)

$$\tau = 1 + i\left(-\frac{C}{2}x + \frac{y}{x}\right).$$

Сила F пропорциональна этому вектору: $F = -f\tau$. Она инвариантна относительно движений из группы G_1, поэтому ее "модуль" f зависит только от x: $f = f(x)$. Итак, уравнение движения приобретает вид:

$$\widehat{z} = -f\tau,$$

или

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + A\dot{x}^2 = -f, \\ &\ddot{y} + C\dot{x}^2 + A\dot{x}\dot{y} = -f\left(-\frac{C}{2}x + \frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Замена $u = y + (C/2)x^2$ сводит эту систему к точно такой же системе с $C = 0$. Поэтому мы можем с самого начала считать $C = 0$, так что движение планеты описывается системой:

$$\ddot{x} + A\dot{x}^2 = -f, \tag{7.11}$$

$$\ddot{y} + A\dot{x}\dot{y} = -f\,\frac{y}{x} \tag{7.12}$$

(с некоторыми начальными условиями). Для аргумента $\varphi = y/x$ точки z мы из уравнений (7.12) и (7.11) получаем уравнение

$$\ddot{\varphi}x + \dot{\varphi}(2\dot{x} + Ax\dot{x}) = 0.$$

Оно равносильно уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}x^2\mathrm{e}^{Ax}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\dot{\varphi}x^2\mathrm{e}^{Ax} = M,$$

это – аналог закона сохранения кинетического момента, или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Me^{-Ax}}{x^2}. \tag{7.13}$$

Уравнение (7.11) допускает понижение порядка: умножим его на $\dot{x}\mathrm{e}^{2Ax}$, получим

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2\mathrm{e}^{2Ax}\right)^{\cdot} = -\dot{U},$$

где $U(x)$ – первообразная для $f(x)\mathrm{e}^{2Ax}$ (какая-нибудь первообразная):

$$U(x) = \int f(x)\mathrm{e}^{2Ax}\,dx.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}\mathrm{e}^{Ax}\right)^2 + U = E, \tag{7.14}$$

где E – некоторая постоянная ("энергия"). Таким образом, первое слагаемое в (7.14) есть "кинетическая энергия", второе – "потенциальная энергия", а само равенство – "закон сохранения энергии".

Из (7.14) найдем $\dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2\,(E-U)}\ \mathrm{e}^{-Ax}. \tag{7.15}$$

Найдем траектории планеты, то есть найдем связь между x и y, но сначала связь между x и φ. Из (7.13) и (7.15) находим

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\frac{M}{x^2\sqrt{2\,(E-U)}},$$

отсюда

$$\varphi = \pm\int\frac{M\,dx}{x^2\sqrt{2\,(E-U)}}$$

Рассмотрим явно решаемый случай ("ньютоновский потенциал"): в качестве $f(x)$ возьмем

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2Ax}/x^2, \tag{7.16}$$

тогда

$$\varphi = \pm M\sqrt{2\left(E+\frac{1}{x}\right)} + N,$$

где N – некоторая постоянная. Можно считать, что $N=0$. Перейдем от φ к $y=\varphi x$, получим уравнение траектории:

$$y^2 = 2M^2(Ex^2+x).$$

Это – кривая второго порядка, проходящая через начало координат и касающаяся в этой точке оси ординат: эллипс при $E<0$, гипербола при $E>0$ и парабола при $E=0$. Таким образом, выполняется аналог *первого закона Кеплера.*

Установим *аналог второго закона Кеплера.*

Из (7.13) найдем $M dt$ и проинтегрируем по t, получим:

$$M\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{L_1}\mathrm{e}^{Ax}(xdy-ydx),$$

где L_1– кусок траектории. Соединим L_1 с началом координат двумя лучами L_0 и L_2. Интегралы по путям L_0 и L_2 равны нулю. Контур $L=L_0+L_1+L_2$ охватывает область G. Итак,

$$M\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{L}\mathrm{e}^{Ax}(x\,dy-y\,dx),$$

Применяя формулу Грина, получим

$$M(t_2-t_1) = \int_G e^{Ax}(2+Ax)\,dx\,dy. \tag{7.17}$$

Итак, функция, выраженная правой частью формулы (7.17), зависит от t линейно. Это и есть аналог второго закона Кеплера. Заметим, что этот результат верен для произвольной функции f.

Классический *третий закон Кеплера* устанавливает явный вид периода обращения в зависимости от энергии. В нашем случае для функции f, задаваемой (7.16), мы можем выразить в явном виде время, за которое планета проходит орбиту, являющуюся эллипсом. Из (7.15) найдем связь t и x:

$$dt = \pm \frac{\mathrm{e}^{Ax}}{\sqrt{2}\,\sqrt{E+1/x}}\,dx. \tag{7.18}$$

Проинтегрируем (7.18), получим

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{e}^{Ax}dx}{\sqrt{E+1/x}}\,.$$

Пусть траектория движения – эллипс, то есть $E < 0$. Найдем значение для "периода" T (то есть для времени, за которое планета пройдет весь эллипс):

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \int_0^{-1/E} \frac{\mathrm{e}^{Ax}dx}{\sqrt{E+1/x}}.$$

Сделаем замену $x = -s/E$. Получаем следующее выражение периода T через энергию E:

$$T = \sqrt{2}(-E)^{-3/2} I(-A/E),$$

где $I(\lambda)$ – функция, определяемая интегралом

$$I(\lambda) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda s} \sqrt{\frac{s}{1-s}}\,ds\,.$$

§ 8. Геометрия на цилиндре

В этом параграфе мы рассматриваем расширенную плоскость дуального переменного – цилиндр Ω – с группой движений $G_2 = \mathrm{SU}(2; \mathbf{\Lambda})$, см. § 3. В основном тексте мы используем переменные x, y на плоскости $\mathbf{\Lambda}$ в качестве локальных координат на Ω. Поэтому мы рассcматриваем группу G_2 (допуская некоторую вольность речи) как группу движений плоскости $\mathbf{\Lambda}$.

Напомним, что группа G_2 состоит из матриц:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a\overline{a} + b\overline{b} = 1. \tag{8.1}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ группы G_2 состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} it & u+iv \\ -u+iv & -it \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Пусть в (8.1) $a = \alpha + ip$, $b = \beta + iq$, тогда $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Группа G_2 действует на плоскости $\mathbf{\Lambda}$ дробно-линейно:

$$z \mapsto w = \frac{az - \overline{b}}{bz + \overline{a}}. \tag{8.3}$$

Разделим вещественные и мнимые части: пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда

$$u = \frac{\alpha x - \beta}{\beta x + \alpha}, \quad v = \frac{(\beta p - \alpha q)(x^2 - 1) + 2(\alpha p + \beta q)x + y}{(\beta x + \alpha)^2}.$$

Мы видим, что функция (8.3) определена на всей плоскости $\mathbf{\Lambda}$ при $\beta = 0$ и на всей плоскости Λ, кроме вертикальной прямой $x = -\alpha/\beta$ при $\beta \neq 0$.

Мера и метрика на Λ, инвариантные относительно G_2, задаются формулами:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{(x^2+1)^2}, \tag{8.4}$$

$$ds^2 = \frac{dx^2}{(x^2+1)^2}. \tag{8.5}$$

Видим, что метрика вырождена.

При стереографической проекции преобразование (8.3) переходит в линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$ переменных ξ, η, ζ, оно переводит цилиндр Ω в себя взаимно однозначно (композиция поворота вокруг оси и сдвиг вдоль образующих), см. матрицу (3.9).

Мера $d\sigma$ и метрика ds^2, см. (8.4) и (8.5), при стереографической проекции переходят в меру и метрику:

$$d\sigma = \frac{d\xi d\eta}{4|\zeta|}, \tag{8.6}$$

$$ds^2 = \frac{d\xi^2}{4\zeta^2}.$$

8.1 *Инвариантные аффинные связности*

Теорема 8.1 *Всякая аффинная связность на $\mathbf{\Lambda}$, инвариантная относительно G_2, задается тремя вещественными параметрами H, P, Q и имеет следующие базисные матрицы*

$$\nabla_{\partial/\partial x} = \frac{2}{x^2+1}\begin{pmatrix} -x+A & 0 \\ y+H & -x+P \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\partial/\partial y} = \frac{2}{x^2+1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x+Q & 0 \end{pmatrix},$$

где обозначено

$$A = P + Q.$$

Доказательство. Возьмем преобразование $z \mapsto w$ из группы G_2. Как и в доказательстве теоремы 7.1, для соответствия с § 6 обозначаем: $z = x_1 + ix_2$, $w = y_1 + iy_2$. Рассмотрим в G_2 следующие три однопараметрические подгруппы

$$\begin{pmatrix} 1+ip & 0 \\ 0 & 1-ip \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & iq \\ iq & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Возьмем сначала первую подгруппу. Она дает преобразование

$$\begin{cases} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= 2p\,x_1 + x_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1, \ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 2p, \ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 1,$$

и потому $L_1^2 = 2$, остальные L_i^k равны нулю. Все вторые частные производные $\partial^2 y_k/\partial x_i \partial x_j$ равны нулю, так что все M_{ij}^m равны нулю. Далее имеем

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial p}\right|_{p=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y_2}{\partial p}\right|_{p=0} = 2x_1.$$

Подставим все это в систему уравнений (6.9). Каждое уравнение задается набором индексов $\{ijm\}$, каждый принимает 2 значения, поэтому всего имеем 8 уравнений. Обозначим частную производную по x_2 нижним индеком x_2. Сокращая на множитель 2, получаем систему (слева от уравнения указывается набор $\{ijm\}$):

система (I)

$$\begin{array}{ll}
111: & \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1 + x_1(\Gamma_{11}^1)_{x_2} = 0, \\
112: & \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 + x_1(\Gamma_{11}^2)_{x_2} = 0, \\
121: & \Gamma_{22}^1 + x_1(\Gamma_{12}^1)_{x_2} = 0. \\
122: & \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 + x_1(\Gamma_{12}^2)_{x_2} = 0, \\
211: & \Gamma_{22}^1 + x_1(\Gamma_{21}^1)_{x_2} = 0. \\
212: & \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 + x_1(\Gamma_{21}^2)_{x_2} = 0, \\
221: & x_1(\Gamma_{22}^1)_{x_2} = 0. \\
222: & -\Gamma_{22}^1 + x_1(\Gamma_{22}^2)_{x_2} = 0,
\end{array}$$

Теперь возьмем вторую подгруппу из (8.7). Она дает преобразование

$$\begin{cases} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= (1 - x_1^2)qx_1 + x_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1, \ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -2x_1 q, \ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 1,$$

и потому $L_1^2 = -2x_1$, остальные L_i^k равны нулю. Только одна частная производная не равна нулю, это

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} = -2q,$$

так что $M_{11}^2 = -2$, остальные M_{ij}^m равны нулю. Далее имеем

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial q}\right|_{q=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y_2}{\partial q}\right|_{q=0} = 1 - x_1^2.$$

Подставим все это в систему уравнений (6.9). Умножая на -1, получим систему

система (II)

$$\begin{array}{ll}
111: & 2x_1\Gamma_{21}^1 + 2x_1\Gamma_{12}^1 + (x_1^2-1)(\Gamma_{11}^1)_{x_2} = 0,\\
112: & 2 + 2x_1\Gamma_{21}^2 + 2x_1\Gamma_{12}^1 - 2x_1\Gamma_{11}^1 + (x_1^2-1)(\Gamma_{11}^2)_{x_2} = 0,\\
121: & 2x_1\Gamma_{22}^1 + (x_1^2-1)(\Gamma_{12}^1)_{x_2} = 0.\\
122: & 2x_1\Gamma_{22}^2 - 2x_1\Gamma_{12}^1 + (x_1^2-1)(\Gamma_{12}^2)_{x_2} = 0,\\
211: & 2x_1\Gamma_{22}^1 + (x_1^2-1)(\Gamma_{21}^1)_{x_2} = 0.\\
212: & 2x_1\Gamma_{22}^2 - 2x_1\Gamma_{21}^1 + (x_1^2-1)(\Gamma_{21}^2)_{x_2} = 0,\\
221: & (x_1^2-1)(\Gamma_{22}^1)_{x_2} = 0.\\
222: & -2x_1\Gamma_{22}^1 + (x_1^2-1)(\Gamma_{22}^2)_{x_2} = 0.
\end{array}$$

Вычтем из каждого уравнения системы II соответствующее уравнение (с тем же $\{ijm\}$) уравнение системы I, умноженное на $2x_1$. Мы получим

$$2 - (x_1^2+1)(\Gamma_{11}^2)_{x_2} = 0, \tag{8.8}$$
$$-(x_1^2+1)(\Gamma_{ij}^m)_{x_2} = 0, \quad \{ijm\} \neq \{112\}. \tag{8.9}$$

Уравнение (8.8) дает явное выражение для Γ_{11}^2:

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2}{x_1^2+1}\,(x_2 + H)\,, \tag{8.10}$$

где H – постоянная, а уравнение (8.9) означает, что все Γ_{ij}^m, кроме Γ_{11}^2, не зависят от x_2. Поэтому из системы I (или II) получаем систему (ср. соответствующую систему в § 7)

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1 = 0,\\
&\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 + \frac{2x_1}{x_1^2+1} = 0,\\
&\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 = 0,\\
&\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 = 0,\\
&\Gamma_{22}^1 = 0.
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Отсюда находим, что

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \tag{8.12}$$

и еще есть соотношение (8.11).

Наконец, возьмем третью подгруппу из (8.7). Получаем

$$y_1 = \frac{\cos t \cdot x_1 - \sin t}{\sin t \cdot x_1 + \cos t}, \quad y_2 = \frac{x_2}{(\sin t \cdot x_1 + \cos t)^2}.$$

Следовательно,

$$L_1^1 = -2x_1, \ L_2^1 = 0, \ L_1^2 = -2x_2, \ L_2^2 = -2x_1,$$

$$M_{11}^2 = M_{12}^2 = M_{21}^2 = -2,$$

остальные M_{ij}^m равны нулю,

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial t}\right|_{t=0} = -x_1^2 - 1, \quad \left.\frac{\partial y_2}{\partial t}\right|_{t=0} = -2x_1x_2.$$

Поскольку мы уже нашли 5 символов Кристоффеля, см. (8.10), (8.12), достаточно рассмотреть только три уравнения из (6.9), а именно, уравнения с $\{111\}$, $\{122\}$, $\{212\}$. Они дают дифференциальное уравнение – одно и то же – для $\Gamma = \Gamma_{11}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^2$, а именно,

$$-2 - 2x_1\Gamma - (x_1^2+1)\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$\Gamma = \frac{2}{x_1^2+1}(-x_1 + C),$$

где C – постоянная. Обозначим эту постоянную для $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^2$ через A, P, Q, соответственно. Соотношение (8.11) дает $A = P + Q$. $\square$

Пусть γ – кривая $z(t) = x(t) + iy(t)$ на $\mathbf{\Lambda}$. Возьмем на $\mathbf{\Lambda}$ инвариантную аффинную связность, задаваемую числами H, P, Q, см. теорему 8.1. Пусть $w(t) = a(t) + i\,b(t)$ – векторное поле, параллельное вдоль γ. По (6.10) для a и b получаем систему

$$\dot a + \frac{2}{x^2+1}(-x + A)\,\dot x\, a = 0 \tag{8.13}$$

$$\dot b + \frac{2}{x^2+1}\Big[(y+H)\ \dot x\, a + (-x+P)\dot x\, b + (-x+Q)\,\dot y\, a\Big] = 0. \tag{8.14}$$

Решение этой системы дается следующей теоремой.

Теорема 8.2 *Векторное поле $w = a + i\,b$, параллельное вдоль γ, задается формулами*

$$a = C(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-2As}, \tag{8.15}$$

$$b = (x^2+1)\mathrm{e}^{-2Ps}\Big[D - 2C\int \frac{(y+H)\dot x + (-x+Q)\dot y}{x^2+1}\mathrm{e}^{-2Qs}\,dt\Big], \tag{8.16}$$

где C, D – некоторые числа, и для краткости мы положили $s = \operatorname{arctg} x$.

Доказательство. Уравнение (8.13) сразу дает (8.15). Подставим (8.15) в (8.14), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая его, получим (8.16). $\square$

8.2 *Ускорение, кривизна*

Ускорение $\widehat{z} = \widehat{x} + i\widehat{y}$ в соответствии с (6.14) дается формулами

$$\widehat{x} = \ddot{x} + \frac{2\dot{x}^2}{x^2+1}(-x+A), \tag{8.17}$$

$$\widehat{y} = \ddot{y} + \frac{2\dot{x}}{x^2+1}\left[\dot{x}(y+H) + (-2x+A)\dot{y}\right], \tag{8.18}$$

или

$$\widehat{z} = \ddot{z} + \frac{2\dot{z}}{1+z\overline{z}}\left[-\overline{z}\dot{z} + A\dot{x} + H\dot{z}i\right].$$

Кривизну мы определяем точно так же, как в § 7. Сейчас расстояние между точками $z(s)$ и $z(t)$ есть (см. (8.5))

$$\int_{x(t)}^{x(s)} \frac{dx}{x^2+1},$$

поэтому кривизна k дается формулой

$$k = (x^2+1)\,\frac{\widehat{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\widehat{x}}{\dot{x}^3}.$$

Подставляя сюда (8.17) и (8.18), получаем

$$k = (x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2(y+H).$$

На плоскости $\mathbf{\Lambda}$ геодезическими (кривыми с нулевым ускорением, кривыми с нулевой кривизной) являются параболы $y + H = A(x^2-1) + Bx$, где A и B – постоянные. Эти параболы характеризуются тем, что они инвариантны относительно инверсии $w + iH = -1/\overline{(z+iH)}$. Зависимость от t достаточно указать для x:

$$x = \operatorname{tg}\frac{\ln(C_1t+C_2)}{2A}, \quad A \neq 0;$$
$$x = \operatorname{tg}(C_1t+C_2), \quad A = 0,$$

где C_1, C_2 – некоторые числа.

Пусть $\mathfrak{k}$ – стационарная подалгебра точки $z=0$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}_2$, она состоит из диагональных матриц X, см. (8.2).

Теорема 8.3 *Геодезические для аффинной связности с параметрами H, P, Q являются траекториями однопараметрических подгрупп* $\exp \mathbb{R}X$ *из* G_2. *Направляющие векторы* $X \in \mathfrak{g}$ *этих подгрупп заполняют плоскость* $\{t = 2Hu\}$ *в* $\mathfrak{g}_2$. *Эта плоскость есть подпространство в* $\mathfrak{g}_2$, *дополнительное к* $\mathfrak{k}$ *и инвариантное относительно* $\mathfrak{k}$ *в присоединенном представлении. Обратно, всякое такое подпространство может быть получено этим способом.*

8.3 *Аналог теоремы Гаусса–Бонне*

Как и в пункте 7.4, по (8.15), (8.16) находим, что угловой коэффициент вектора после параллельного перенесения вектора вдоль L в точку $z(t)$ есть

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{2Qs}\Big[T - 2\int \frac{(y+H)\dot{x} + (-x+Q)\dot{y}}{x^2+1}\, \mathrm{e}^{-2Qs}\, dt\Big],$$

где T – некоторое число ($T = D/C$, см. (8.15), (8.16)), $s = \operatorname{arctg} x$. Следовательно, угловой коэффициент исходного вектора в точке $z(t_0) = z_0 = x_0 + iy_0$ есть

$$\varphi(t_0) = T\,\mathrm{e}^{2Qs_0},$$

где $s_0 = \operatorname{arctg} x_0$, а после перенесения в ту же точку $z_0 = z(t_1)$ есть

$$\varphi(t_1) = \mathrm{e}^{2Qs_0}\Big[T - 2\int_{t_0}^{t_1} \frac{(y+H)\dot{x} + (-x+Q)\dot{y}}{x^2+1}\, \mathrm{e}^{-2Qs}\, dt\Big],$$

так что

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi(t_1) - \varphi(t_0) = \\ &= 2\mathrm{e}^{2Qs_0} \int_L \mathrm{e}^{-2Qs} \frac{(x-Q)dy - (y+H)dx}{x^2+1}\,. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина, получим окончательно

$$\Delta\varphi = 4(Q^2+1)\int_G \mathrm{e}^{-2Q(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0)}\, d\sigma. \tag{8.19}$$

где $d\sigma$ – мера (8.4). По аналогии с классической теоремой Гаусса–Бонне мы можем назвать подинтегральную функцию в (8.19) гауссовой кривизной. Заметим, что, как и в пункте 7.4, в отличие от классического случая угол поворота $\Delta\varphi$ *зависит* от начальной точки z_0. С другой стороны, формула (8.19) инвариантна относительно движений из группы G_2, поскольку мера $d\sigma$ инвариантна относительно G_2.

8.4 *Движение планет*

Рассмотрим движение планет на плоскости $\mathbf{\Lambda}$, снабженной инвариантной аффинной связностью с параметрами H, P, Q, см. теорему 8.1. Мы рассуждаем аналогично пункту 7.5. Мы можем считать, что $H=0$ (этого можно добиться сдвигом по оси Oy на $-H$).

Поместим Солнце в начало координат. Геодезическая, соединяющая Солнце и планету, находящуюся в точке $z=x+iy$, есть прямая $y=Bx$. Касательный вектор к ней в точке z (с первой координатой, равной 1) есть $1+i\varphi=\exp i\varphi$, $\varphi=y/x$. Поэтому уравнение движения имеет вид:

$$\widehat{z}=-f\mathrm{e}^{i\varphi},$$

где $\widehat{z}$ – ускорение, f – "модуль" силы, он зависит только от x: $f=f(x)$. Подставим сюда формулы (8.17), (8.18) для ускорения. Тогда мы получаем, что движение планеты описывается системой уравнений:

$$\ddot{x}+\frac{2\dot{x}^2}{x^2+1}(-x+A)=-f, \tag{8.20}$$

$$\ddot{y}+\frac{2\dot{x}}{x^2+1}\left[\dot{x}y+(-2x+A)\dot{y}\right]=-f\,\frac{y}{x}. \tag{8.21}$$

Для аргумента $\varphi=y/x$ точки z мы из уравнений (8.20) и (8.21) получаем уравнение

$$x\ddot{\varphi}+\frac{2\dot{x}\dot{\varphi}}{x^2+1}\left(1-x^2+Ax\right)=0,$$

откуда

$$\dot{\varphi}=M\frac{(x^2+1)^2}{x^2}\,\mathrm{e}^{-2A\operatorname{arctg}x} \tag{8.22}$$

где M – постоянная, назовём её кинетическим моментом (по аналогии с классическим случаем).

Уравнение (8.20) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{x^2+1}\right)+2A\left(\frac{\dot{x}}{x^2+1}\right)^2=-\frac{f}{x^2+1}. \tag{8.23}$$

Вспомним формулу (8.5) для метрики. Из нее следует, что

$$\frac{\dot{x}}{x^2+1}=\dot{s}, \tag{8.24}$$

где $s=\operatorname{arctg}x$ – расстояние от точки z до 0. Поэтому уравнение (8.23) можно переписать так:

$$\ddot{s}+2A\dot{s}^2=-g(s), \tag{8.25}$$

где

$$g(s)=\frac{f(x)}{x^2+1}.$$

Уравнение (8.25) допускает понижение порядка: умножим его на $\dot{s}\exp(4As)$, получим

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\left(\dot{s}^2\mathrm{e}^{4As}\right) = -\dot{U},$$

где U – первообразная для $g(s)\exp(4As)$:

$$U = \int g(s)\mathrm{e}^{4As}\,ds.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(\dot{s}\mathrm{e}^{2As}\right)^2 + U = E, \qquad (8.26)$$

где E – некоторая постоянная ("энергия"). Таким образом, первое слагаемое в (8.26) есть "кинетическая энергия", второе – "потенциальная энергия", а само равенство – "закон сохранения энергии". Потенциальную энергию можно выразить в терминах x:

$$U = \int \frac{f(x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{e}^{4A\,\mathrm{arctg}\,x}\,dx. \qquad (8.27)$$

Из (8.26) получаем

$$\dot{s} = \pm\mathrm{e}^{-2As}\sqrt{2(E-U)}$$

и, по (8.24),

$$\dot{x} = \pm(x^2+1)\mathrm{e}^{-2As}\sqrt{2(E-U)}. \qquad (8.28)$$

Разделим (8.22) на (8.28), получим

$$d\varphi = \pm\frac{M(x^2+1)}{x^2\sqrt{2(E-U)}}\,dx, \qquad (8.29)$$

откуда

$$\varphi + C = \pm\int \frac{M(x^2+1)}{x^2\sqrt{2(E-U)}}\,dx, \qquad (8.30)$$

Рассмотрим явно решаемый случай – аналог ньютоновского потенциала на трехмерной сфере.

Напомним [1] указанный потенциал, соответствующую силу притяжения и реализацию этой ситуации на комплексной плоскости. Возьмем единичную трёхмерную сферу $S^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1$ в $\mathbb{R}^4$ с евклидовой метрикой. Притягивающая масса (Солнце), сосредоточенная в некоторой точке $x^0 \in S^3$, создаёт в точке $x \in S^3$ потенциал $U = -2k\,\mathrm{ctg}\,\theta$, где $k > 0$ и θ – угол между x^0 и x. Движение планеты в поле тяготения Солнца происходит в сечении сферы S^3 некоторой гиперплоскостью, то есть в сфере S^2. Можно считать, что эта гиперплоскость есть $x_4 = 0$, и тогда S^2 есть сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть Солнце находится в Южном полюсе $(0, 0, -1)$. Отобразим сферу S^2 на плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y с помощью стереографической проекции, взяв за центр проекции Северный полюс $(0, 0, 1)$:

$$x = \frac{x_1}{1-x_3}\,,\ y = \frac{x_2}{1-x_3}\,.$$

Обратное отображение задаётся формулами:

$$x_1 = \frac{2x}{r^2+1}, \; x_2 = \frac{2y}{r^2+1}, \; x_3 = \frac{r^2-1}{r^2+1},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Теперь рассмотрим плоскость xOy как *комплексную* плоскость переменной $z = x+iy$. Тогда вращения сферы перейдут в дробно-линейные преобразования плоскости с унитарной матрицей. Евклидова метрика на сфере перейдёт в метрику

$$\frac{dx^2+dy^2}{(r^2+1)^2}, \tag{8.31}$$

а потенциал $U = -2k \operatorname{ctg} \theta$ перейдёт в потенциал

$$U = k\left(r - \frac{1}{r}\right). \tag{8.32}$$

Тогда сила тяготения F будет равна $-\operatorname{grad} U$, где градиент берется в смысле метрики (8.31), а именно, модуль силы есть

$$\begin{aligned} |F| &= (r^2+1)^2 \frac{d}{dr} k\left(r - \frac{1}{r}\right) \\ &= k\frac{(r^2+1)^3}{r^2}, \end{aligned}$$

а вектор силы направлен от z к 0. Если записать z в показательной форме: $z = r\exp(i\varphi)$, то

$$F = -k\frac{(r^2+1)^3}{r^2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}. \tag{8.33}$$

Теперь вернемся к плоскости $\mathbf{\Lambda}$ *дуального* переменного. Запишем $z \in \Lambda$ в показательной форме (см. (1.1)): $z = x\exp(i\varphi)$. Имея в виду (8.32) и (8.33), возьмём в качестве потенциала (8.27) функцию $U = k(|x| - 1/|x|)$. Тогда "модуль" силы притяжения есть

$$f(x) = -k\frac{(x^2+1)^3}{x^2}\, \mathrm{e}^{-4A \operatorname{arctg} x}. \tag{8.34}$$

Рассмотрим случай $x > 0$. Тогда

$$U = k\left(x - \frac{1}{x}\right). \tag{8.35}$$

Поскольку $dU = k(x^2+1)/x^2$, мы можем теперь в интеграле (8.30) перейти к переменной U. Тогда интеграл берется, мы получаем

$$\varphi + C = \mp\frac{M}{k}\sqrt{2(E-U)}.$$

Отсюда

$$(\varphi + C)^2 = \frac{2M^2}{k^2}(E-U). \tag{8.36}$$

Подставляя сюда (8.35) и $\varphi = y/x$, получим уравнение орбиты планеты:

$$(y + Cx)^2 = \frac{2M^2}{k}(-x^3 + \frac{E}{k}x^2 + x).$$

Поворотом на некоторый угол можно добиться того, чтобы $C = 0$, тогда орбита задаётся уравнением

$$y^2 = \frac{2M^2}{k}(-x^3 + \frac{E}{k}x^2 + x). \tag{8.37}$$

Это – овал в полуплоскости $x > 0$, симметричный относительно оси Ox и пересекающий ось Ox в точках 0 и

$$x_0 = \frac{E + \sqrt{E^2 + 4k^2}}{2k}.$$

Случай $x < 0$ рассматривается аналогично: получается траектория, симметричная относительно оси Oy.

Далее рассмотрим законы Кеплера. Здесь отметим любопытный факт: для формулировок этих законов надо использовать *различные* многообразия: цилиндр Ω, касательную к нему плоскость в южном полюсе, экваториальную плоскость и саму плоскость $\mathbf{\Lambda}$.

Образ орбиты (8.37) на цилиндре Ω при стереографической проекции задаётся уравнением:

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 = \frac{2M^2}{k}\left(\frac{E}{k} - \frac{2\zeta}{\xi}\right). \tag{8.38}$$

Спроектируем эту кривую на касательную плоскость $\zeta = -1$ к Ω в Южном полюсе $(0, 0, -1)$ с помощью центральной проекции с центром в точке $(0, 0, 0)$. Эта проекция сопоставляет точке (ξ, η, ζ) точку $(u, v, -1)$, где $u = -\xi/\zeta$, $v = -\eta/\zeta$. Кривая (8.38) переходит в кривую, задаваемую уравнением

$$v^2 = \frac{2M^2}{k^2}(Eu + 2k)u.$$

Это – уравнение кривой второго порядка, проходящей через точку (0,0): гиперболы при $E > 0$, параболы при $E = 0$, эллипса при $E < 0$. Тип кривой зависит от взаимного расположения кривой (8.37) на Ω и экваториальной плоскости $\zeta = 0$: кривая пересекает эту плоскость, касается её, не пересекает, соответственно.

Установим *аналог второго закона Кеплера.*

Из (8.22) найдем Mdt:

$$\begin{aligned} Mdt &= \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, \mathrm{e}^{2As}\, d\varphi = \\ &= \frac{1}{(x^2+1)^2}\, \mathrm{e}^{2As}(xdy - ydx), \end{aligned} \tag{8.39}$$

и проинтегрируем по t от t_1 до t_2. Как и в пункте 7.5, проинтегрируем по криволинейному сектору и применим формулу Грина. Вспоминая выражение (8.4) для инвариантной меры $d\sigma$, получим

$$M(t_2 - t_1) = 2\int_G \frac{1 - x^2 + Ax}{x^2 + 1}\, \mathrm{e}^{2As}\, d\sigma. \tag{8.40}$$

Итак, функция, выраженная правой частью формулы (8.40), зависит от t линейно. Этот результат верен для произвольной функции f.

При $A = 0$ получается простая интерпретация этой формулы в координатах ξ, η, ζ. Вспоминая (8.6), получаем:

$$M(t_2 - t_1) = -\frac{1}{2}\int_H \mathrm{sgn}\zeta\, d\xi d\eta, \tag{8.41}$$

где H – проекция на плоскость $\xi O\eta$ образа D сектора G при стереографической проекции. Если кривая (8.38) лежит ниже плоскости $\zeta = 0$, то есть $\zeta < 0$, то (8.41) даёт

$$M(t_1 - t_0) = \frac{1}{2}S(H), \tag{8.42}$$

где $S(H)$ — площадь сектора H. В общем случае тоже справедлива формула (8.42), только $S(H)$ обозначает сумму площадей частей сектора H, взятых со знаком: площадь берётся со знаком "плюс" или "минус" соответственно тому, лежат соответствующие точки на цилиндре ниже или выше экваториальной плоскости $\zeta = 0$.

Классический *третий закон Кеплера* устанавливает явный вид периода обращения в зависимости от энергии.

Найдем время T, за которое планета проходит орбиту (8.37). Следовательно, мы предполагаем, что функция f задается формулой (8.34). Пусть движение планеты по кривой (8.37) происходит против часовой стрелки. Тогда аргумент φ меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Из (8.39) получаем

$$MT = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, \mathrm{e}^{2As}\, d\varphi. \tag{8.43}$$

Выразим первый множитель под интегралом через φ. Сначала пишем

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 = \frac{U^2}{k^2} + 4,$$

а затем выражаем потенциал U через φ с помощью (8.36) (где $C = 0$):

$$U = E - \frac{1}{2}\left(\frac{k\varphi}{M}\right)^2.$$

Подставим все это в (8.43) и сделаем замену $\varphi = \sqrt{2/k}\, M\, \mu$, мы получим

$$T = \sqrt{\frac{2}{k}}\, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2As}}{(\mu^2 - E/k)^2 + 4}\, d\mu.$$

При $A = 0$ этот интеграл удается явно вычислить (с помощью вычетов).

Теорема 8.4 *Пусть $A = 0$ и функция f задается формулой (8.34). Период T обращения планеты, то есть время, за которое планета пробежит кривую (8.37), есть следующая функция от энергии E:*

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E + \sqrt{E^2 + 4k^2}}{E^2 + 4k^2}}.$$

Можно написать другое выражение для T. Подставим в (8.43) $d\varphi$ из (8.29) и перейдем от $x(= \operatorname{tg} s)$ к $\alpha = 2s = 2\operatorname{arctg} x$. Так как $U = k(\operatorname{tg} s - \operatorname{ctg} s) = -2k \operatorname{ctg} \alpha$, то

$$T = \frac{1}{2\sqrt{k}} \int_0^{\alpha_0} \frac{\mathrm{e}^{A\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha_0}}\, d\alpha,$$

где $\alpha_0 = 2\operatorname{arctg} x_0$, $\operatorname{ctg}\alpha_0 = -E/2k$, а x_0 дается формулой (8.29).

§ 9. Геометрия на плоскости Лобачевского–Галилея

В этом параграфе мы рассматриваем полосу $\mathcal{L} : z\overline{z} < 1$, то есть $-1 < x < 1$, в плоскости $\mathbf{\Lambda}$. Назовем эту полосу плоскостью Лобачевского–Галилея. Она есть однородное пространство для группы $G_3 = SU(1,1;\mathbf{\Lambda})$, см. § 3, относительно дробно-линейного действия.

Напомним, что группа G_3 состоит из матриц:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a\overline{a} - b\overline{b} = 1. \tag{9.1}$$

Она состоит из двух связных частей: $\operatorname{Re} a \geqslant 1$ и $\operatorname{Re} a \leqslant -1$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_3$ группы G_3 состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} it & \lambda + i\mu \\ \lambda - i\mu & -it \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Пусть в (9.1) $a = \alpha + ip$, $b = \beta + iq$, тогда $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Действие группы G_3 на $\mathcal{L}$ есть

$$z \longmapsto w = \frac{az + \overline{b}}{bz + \overline{a}}. \tag{9.3}$$

Разделим вещественные и мнимые части: пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда

$$u = \frac{\alpha x + \beta}{\beta x + \alpha}, \quad v = \frac{(\beta p - \alpha q)(x^2 + 1) + 2(\alpha p - \beta q)x + y}{(\beta x + \alpha)^2}.$$

Мы видим, что функция (9.3) определена на всей $\mathcal{L}$.

Мера и метрика на $\mathcal{L}$, инвариантные относительно G_3, задаются формулами:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{(1 - x^2)^2}, \tag{9.4}$$

$$ds = \frac{dx}{1-x^2}\,. \tag{9.5}$$

Видим, что метрика вырождена. Нижеследующие утверждения доказываются аналогично утверждениям из § 8.

Теорема 9.1 *Всякая аффинная связность на $\mathcal{L}$, инвариантная относительно G_3, задается тремя вещественными параметрами H, P, Q и имеет следующие базисные матрицы*

$$\nabla_{\partial/\partial x} = \frac{2}{1-x^2}\begin{pmatrix} x+A & 0 \\ -y-H & x+P \end{pmatrix},\ \nabla_{\partial/\partial y} = \frac{2}{1-x^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x+Q & 0 \end{pmatrix},$$

где $A = P + Q$.

Векторное поле $w(t) = a(t) + i\,b(t)$, параллельное вдоль кривой $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} &\dot a + \frac{2}{1-x^2}\,(x+A)\,\dot x\, a = 0, \\ &\dot b + \frac{2}{1-x^2}\Big[-(y+H)\,\dot x\, a + (x+P)\dot x\, b + (x+Q)\,\dot y\, a\Big] = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы дается следующими формулами

$$a = C(1-x^2)\,\varepsilon(x)^A, \tag{9.6}$$
$$b = (1-x^2)\,\varepsilon(x)^P\Big[D - 2C\int \frac{-(y+H)\dot x + (x+Q)\dot y}{1-x^2}\,\varepsilon(x)^Q\,dt\Big], \tag{9.7}$$

где C, D – некоторые числа и

$$\varepsilon(x) = \frac{1-x}{1+x}\,.$$

Ускорение $\widehat{z} = \widehat{x} + i\widehat{y}$ дается формулами

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= \ddot x + \frac{2\dot x^2}{1-x^2}\,(x+A), \\ \widehat{y} &= \ddot y + \frac{2\dot x}{1-x^2}\,[-(y+H)\dot x + (2x+A)\dot y]\,, \end{aligned}$$

или

$$\widehat{z} = \ddot z + \frac{2\dot z}{1-z\overline{z}}\,[\overline{z}\dot z + A\dot x - H\dot z i]\,.$$

Кривизну мы определяем точно так же, как в § 7. Сейчас расстояние между точками $z(s)$ и $z(t)$ есть (см. (9.5))

$$\int_{x(t)}^{x(s)} \frac{dx}{1-x^2}\,,$$

поэтому кривизна k дается формулой

$$k = (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2(y + H).$$

Кривые постоянной кривизны k – это параболы $y = a(x^2+1) + bx - R - k/2$. В частности, кривые нулевой кривизны (геодезические) – это параболы $y + H = = a(x^2+1) + bx$.

Пусть $\mathfrak{h}$ – стационарная подалгебра точки $z = 0$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}_3$, она состоит из диагональных матриц X, см. (9.2).

Теорема 9.2 *Геодезические для аффинной связности с параметрами H, P, Q являются траекториями однопараметрических подгрупп* $\exp \mathbb{R}X$ *из G_3. Направляющие векторы $X \in \mathfrak{g}_3$ этих подгрупп заполняют некоторую плоскость в $\mathfrak{g}_3$. Эта плоскость есть подпространство в $\mathfrak{g}_3$, дополнительное к $\mathfrak{h}$ и инвариантное относительно $\mathfrak{h}$ в присоединенном представлении. Обратно, всякое такое подпространство может быть получено этим способом.*

Рассмотрим аналоги различных замечательных кривых на евклидовой плоскости. Как и в § 7, мы исходим из определений, связанных с понятием угла. Вот некоторые кривые для $\mathcal{L}$: дуги окружности с концами $\pm c$ на оси Ox (отрезок $[-c, c]$ виден под постоянным углом):

$$y = K\frac{(x^2 - c^2)(x^2 - c^{-2})}{1 - x^2} + H\,\frac{x^2 - c^2}{c^2 + 1},$$

эллипс и гипербола с фокусами $\pm c$ на оси Ox – это части кривой

$$y^2 = K|x^2 - c^2|\,\left(c^{-2} - x^2\right)\,\left(c^{-2} - x^2\right)^{H(1-1/c^2)},$$

для которых $|x| \leqslant c$ (эллипс), $|x| \geqslant c$ (гипербола). Параболы мы получаем, устремляя один из фокусов эллипса или гиперболы к бесконечности. Получаем, соответственно, параболы эллиптического и гиперболического типа, например, если неподвижный фокус расположен в точке $x = 0$, то (независимо от H): $y^2 = Kx(1 - x^2)$, $x \geqslant 0$, и $y = -Kx(1 - x^2)$, $x \leqslant 0$. Логарифмическая спираль: $y = Kx(\ln|x| + C)$.

Рассмотрим аналог теоремы Гаусса - Бонне. По (9.6), (9.7) находим, что угловой коэффициент вектора после параллельного перенесения вектора вдоль L в точку $z(t)$ есть

$$\varphi(t) = \varepsilon(x)^{-Q}\Big[T - 2\int \frac{-(y + H)\dot{x} + (x + Q)\dot{y}}{1 - x^2}\,\varepsilon(x)^Q\,dt\Big],$$

где $T = D/C$. Следовательно, угловой коэффициент исходного вектора в точке $z(t_0) = z_0 = x_0 + iy_0$ есть

$$\varphi(t_0) = T\,\varepsilon(x_0)^{-Q},$$

а после перенесения в ту же точку $z_0 = z(t_1)$ есть

$$\varphi(t_1) = \varepsilon(x_0)^{-Q}\Big[T - 2\int_{t_0}^{t_1} \frac{-(y + H)\dot{x} + (x + Q)\dot{y}}{1 - x^2}\,\varepsilon(x)^Q\,dt\Big],$$

так что

$$\Delta\varphi = -2\varepsilon(x_0)^{-Q} \int_L \varepsilon(x)^Q \frac{-(y+H)dx + (x+Q)dy}{1-x^2}.$$

Применяя формулу Грина, получим окончательно

$$\Delta\varphi = 4(Q^2-1)\,\varepsilon(x_0)^{-Q} \int_D \varepsilon(x)^Q d\sigma, \tag{9.8}$$

где $d\sigma$ – мера (9.4). Опять заметим, что в отличие от классического случая угол поворота $\Delta\varphi$ *зависит* от начальной точки z_0. С другой стороны, формула (9.8) инвариантна относительно движений из группы G_3.

Рассмотрим задачу о движении частицы (планеты) с массой 1 в центральном поле F с центром в $z = 0$. Мы рассуждаем, как в пункте 8.4. Мы можем считать, что $H = 0$. Движение планеты описывается системой уравнений:

$$\ddot{x} + \frac{2\dot{x}^2}{1-x^2}(x+A) = -f, \tag{9.9}$$

$$\ddot{y} + \frac{2\dot{x}}{1-x^2}\left[-\dot{x}y + (2x+A)\dot{y}\right] = -f\,\frac{y}{x}. \tag{9.10}$$

Отсюда для аргумента $\varphi = y/x$ точки z получаем уравнение

$$x\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{x}\dot{\varphi}}{1-x^2}\,(1+x^2+Ax) = 0,$$

откуда

$$\dot{\varphi} = M\frac{(1-x^2)^2}{x^2}\,\varepsilon(x)^A$$

где M – постоянная (кинетический момент). Из уравнения (9.9) следует "закон сохранения энергии".

$$\frac{1}{2}\,\dot{s}^2\,\varepsilon(x)^{-2A} + U = E,$$

где s – расстояние от 0 до x, см. (9.5), E – некоторая постоянная ("энергия"), U – потенциал:

$$U = \int f(x)(1-x^2)^{-2}\varepsilon(x)^{-2A}dx,$$

Как и в § 8, получаем

$$\varphi + C = \pm \int \frac{M(1-x^2)}{x^2\sqrt{2(E-U)}}\,dx,$$

Возьмем в качестве потенциала U аналог потенциала из трехмерного пространства Лобачевского:

$$U = k\left(-\frac{1}{x} - x + 2\right),$$

$k > 0$ – коэффициент. Тогда

$$f(x) = k\,\frac{(1-x^2)^3}{x^2}\,\varepsilon(x)^{2A}.$$

Тогда уравнение траектории есть:

$$(y + Cx)^2 = 2M^2k^{-2}x\left(kx^2 + (E - 2k)x + k\right).$$

В модели Клейна траектория есть кривая второго порядка:

$$(v + Cu)^2 = 2M^2k^{-2}\left((E - 2k)u^2 + 2ku\right),$$

аналог первого закона Кеплера. Второй закон Кеплера справедлив для проекции траектории в сечении Γ_3 на плоскость h_2Oh_3. Справедлив аналог третьего закона Кеплера, а именно, если орбита в модели Клейна есть эллипс с горизонтальной полуосью a, то период зависит только от a. Точная формула при $A = 0$:

$$T = (\pi/2)\sqrt{a/2k}\left\{(1 - 2k)^{-1/2} - (1 + 2k)^{-1/2}\right\}.$$

§ 10. Пространства Фока

В настоящем параграфе мы рассматриваем аналоги пространства Фока на плоскости $\mathbf{\Lambda}$ дуального переменного и на плоскости Лобачевского–Галилея $\mathcal{L}$.

Пространство Фока на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (на комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$), см., например, [4], служит основой для построения виковского и антивиковского квантований.

10.1 *Пространство Фока на плоскости дуального переменного*

Мы рассматриваем аналитические функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ на $\mathbf{\Lambda}$ со значениями тоже в $\mathbf{\Lambda}$, см. § 2. Напомним, что аналитическая функция $f(z)$ есть $f(z) = \varphi(x) + i[\varphi'(x)y + \psi(x)]$ с дифференцируемыми φ, ψ.

Назовём пространством Фока $\mathcal{F}_h(\mathbf{\Lambda})$ на $\mathbf{\Lambda}$ совокупность аналитических на $\mathbf{\Lambda}$ функций $f(z)$, для которых $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ содержатся в $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/h}dx)$, $h > 0$ – параметр ("постоянная Планка"). Определим в $\mathcal{F}_h(\mathbf{\Lambda})$ "скалярное произведение" (эрмитову форму над $\mathbf{\Lambda}$):

$$(f_1, f_2) = c\int_{\mathbf{\Lambda}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\,\mathrm{e}^{-x^2/h}\,\delta(y)\,dxdy,$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака на вещественной прямой, нормирующий множитель $c = (\pi h)^{-1/2}$ взят так, чтобы $(1, 1) = 1$. Пусть аналитическим функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$ отвечают (по (2.1) функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$, соответственно. Тогда

$$(f_1, f_2) = c\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)\varphi_2(x)e^{-x^2/h}dx - i\int_{-\infty}^{\infty}\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \psi_1(x)\\ \varphi_2(x) & \psi_2(x)\end{vmatrix}e^{-x^2/h}dx\right\}.$$

В отличие от обычного (комплексного) пространства Фока система $\{z^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, не является ортогональной:

$$(z^n, z^m) = \begin{cases} 0, \ n+m \equiv 1, \\ (z^n, z^m) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} h^{n+m} \Gamma\left(\dfrac{n+m+1}{2}\right), \ n+m \equiv 0. \end{cases}$$

Ортогонализация этой системы приводит к ортогональной системе функций

$$f_n(z) = H_n(z/\sqrt{h}), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $H_n(s)$ – многочлены Эрмита [3] 10.13. Скалярный квадрат функции f_n равен $\lambda_n = 2^n n!$. Всякая функция f из $\mathcal{F}_h(\mathbf{\Lambda})$ разлагается в ряд по системе $\{f_n\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z), \quad a_n = \frac{(f, f_n)}{\lambda_n}.$$

Пусть $\Phi(z, \overline{w})$ – ядро Бергмана, отвечающее системе $\{f_n\}$:

$$\Phi(z, \overline{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} f_n(z) \overline{f_n(w)}.$$

Функция (обобщённая) $\Phi_{\overline{w}}(z) = \Phi(z, \overline{w})$ обладает воспроизводящим свойством:

$$(f, \Phi_{\overline{w}}) = f(w).$$

Таким образом, функция $\Phi(z, \overline{w})$ является переполненной системой в $\mathcal{F}_h(\mathbf{\Lambda})$ (системой когерентных состояний). Ее явный вид дается следующей теоремой (доказательство ее аналогично доказательству теоремы 10.2, см. ниже).

Теорема 10.1 *Ядро Бергмана $\Phi(z, \overline{w})$ имеет следующее выражение:*

$$\Phi(z, \overline{w}) = \sqrt{\pi h} \left\{ \mathrm{e}^{x^2/h} \delta(x-u) + i \left[y\mathrm{e}^{u^2/h} + v\mathrm{e}^{x^2/h} \right] \delta'(x-u) \right\},$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Рассмотрим в $\mathcal{F}_h(\mathbf{\Lambda})$ "операторы рождения и уничтожения" $a = z$ (умножение на z) и $b = h(d/dz)$. Первый из них эрмитов: $a^* = a$, для второго сопряжённый есть $b^* = 2z - h(d/dz)$. Следовательно, операторы $X_1 = iz$ и $X_2 = z - h(d/dz)$ – косоэрмитовы. Коммутатор $X_3 = [X_1, X_2] = ih$ коммутирует с X_1 и X_2. Следовательно, алгебра Ли (над $\mathbb{R}$), порождённая X_1 и X_2, имеет базисом X_1, X_2, X_3 и является алгеброй Ли группы Гейзенберга. В терминах пар (φ, ψ), см. § 2, операторы X_k действуют так: X_1, X_2, X_3 переводят пару (φ, ψ) соответственно в пару $(0, x\varphi)$, $(L\varphi, L\psi)$, $(0, h\varphi)$, где $L = x - h(d/dx)$.

Соответствующая группа Ли состоит из унитарных в $\mathcal{F}_h(\mathbf{\Lambda})$ операторов. Однопараметрические подгруппы $\exp(tX_1)$, $\exp(tX_2)$, $\exp(tX_3)$ переводят $f(z)$ соответственно в

$$\mathrm{e}^{itz} f(z), \quad \mathrm{e}^{-ht^2/2} \mathrm{e}^{tz} f(z - ht), \quad \mathrm{e}^{iht} f(z).$$

10.2 *Пространство Фока на плоскости Лобачевского-Галилея*

Пусть λ – вещественное число, $\lambda > -1/2$. Напомним, что инвариантная мера на $\mathcal{L}$ дается формулой (9.4). Назовём пространством Фока $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{L})$ на плоскости Лобачевского-Галилея $\mathcal{L}$ совокупность аналитических на $\mathcal{L}$ функций $f(z)$ со значениями в $\mathbf{\Lambda}$, см. (2.1), для которых $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству L^2 на отрезке $[-1,1]$ с весовой функцией

$$\omega(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}, \tag{10.1}$$

то есть сходятся интегралы:

$$\int_{-1}^{1} \varphi^2(x)\omega(x)dx, \quad \int_{-1}^{1} \psi^2(x)\omega(x)dx.$$

Определим "скалярное произведение" (т.е. эрмитову форму над $\mathbf{\Lambda}$) в $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{L})$:

$$(f_1, f_2) = c\int_{\mathcal{L}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\,\delta(y)\,\omega(x)\,dx\,dy, \quad z = x+iy.$$

Заметим, что для обычной плоскости Лобачевского (в комплексном случае) показатель у весовой функции пишут в виде $-2\sigma-2$, но нам сейчас удобнее взять именно (10.1).

Пусть аналитическим функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$ отвечают по (2.1) функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$, соответственно. Тогда

$$(f_1, f_2) = c\left(\int_{-1}^{1} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\omega(x)\,dx - i\int_{-1}^{1} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) \end{vmatrix} \omega(x)\,dx\right).$$

Константу $c = c(\lambda)$ возьмем так, чтобы $(1,1) = 1$, тогда

$$c = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)}.$$

Как и в пункте 10.1, система $\{z^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, не является ортогональной:

$$(z^n, z^m) = \begin{cases} 0, \ n+m \equiv 1, \\ \dfrac{(1/2)^{[k]}}{(\lambda+1)^{[k]}}, \quad n+m = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где мы использовали обозначение $a^{[n]} = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$.

Ортогонализация этой системы приводит к ортогональной системе функций

$$f_n(z) = C_n^\lambda(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $C_n^\lambda(x)$ – многочлены Гегенбауэра [3] 10.9, так что

$$f_n(z) = C_n^\lambda(x) + iy\,(C_n^\lambda)'(x), \quad z = x+iy, \tag{10.2}$$

штрих означает производную. Скалярный квадрат функции f_n равен

$$\mu_n = \frac{\lambda\,(2\lambda)^{[n]}}{(n+\lambda)\,n!}.$$

Всякая функция f из $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{L})$ разлагается в ряд по системе $\{f_n\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z), \quad a_n = \frac{(f, f_n)}{\mu_n}.$$

Пусть $\Phi(z, \overline{w})$ – ядро Бергмана, отвечающее системе $\{f_n\}$:

$$\Phi(z, \overline{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n}\, f_n(z)\overline{f_n(w)}.$$

Функция (обобщённая) $\Phi_{\overline{w}}(z) = \Phi(z, \overline{w})$ обладает воспроизводящим свойством:

$$(f, \Phi_{\overline{w}}) = f(w).$$

Таким образом, функция $\Phi(z, \overline{w})$ является переполненной системой в $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{L})$ (системой когерентных состояний). Ее явный вид дается следующей теоремой.

Теорема 10.2 *Ядро Бергмана $\Phi(z, \overline{w})$ имеет следующее выражение:*

$$\Phi(z, \overline{w}) = \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{\omega(x)}\,\delta(x-u) + i\left[y\frac{1}{\omega(u)} + v\frac{1}{\omega(x)}\right]\delta'(x-u)\right\}, \qquad (10.3)$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Доказательство. Скалярный квадрат многочлена Гегенбауэра $C_n^\lambda(x)$ в пространстве $L^2([-1,1]; \omega(x)\,dx)$ равен $h_n = \mu_n/c$. Ядро Бергмана $K(x,u)$ в этом пространстве для системы, состоящей из многочленов Гегенбауэра, есть

$$\begin{aligned} K(x,u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} C_n^\lambda(x) C_n^\lambda(u) = \\ &= \frac{1}{\omega(x)}\,\delta(x-u). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (10.2) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \overline{w}) &= \frac{1}{c}\left\{1 + iy\frac{\partial}{\partial x} - iv\frac{\partial}{\partial u}\right\} K(x,u) = \\ &= \frac{1}{c}\left\{1 + iy\frac{\partial}{\partial x} - iv\frac{\partial}{\partial u}\right\} \frac{1}{\omega(x)}\,\delta(x-u), \end{aligned}$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$, отсюда следует (10.3). $\square$

Литература

1. Л. Альфорс. Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.

2. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1989.

3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука. 1966.

4. Ф. А. Березин, М. А. Шубин. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983.

5. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.

6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 1958.

7. В. Ф. Молчанов, Элементарные представления группы Лагерра. Матем. заметки. 1978. Том 23. Вып. 1. 31–39.

8. В. Ф. Молчанов, Н. А. Малашонок. Некоторые геометрические и физические задачи для плоскости дуального переменного. Державинские чтения V, Матер. научн. конф., февр. 2000. Тамбов 2000. 5–7.

9. В. Ф. Молчанов, Н. А. Малашонок. Некоторые геометрические и физические задачи на плоскости Лобачевского–Галилея. Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки., 2002. Том 7. Вып. 1. 55–57.

10. Л. М. Молчанова. Однородные обобщенные функции на плоскости дуального переменного. Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки. 2002. Том 7. вып. 1. 54–55.

11. П. К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии, М.: Гостехиздат. 1956.

12. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М.: Мир. 1964.

13. И. М. Яглом. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, М.: Наука. 1969.

Поступила в редакцию 25 апреля 2009 г.

Keywords: algebras; linear-fractional functions; affine connections; geodesics; distributions; planet motion.

We consider some geometric, analytic and mechanic topics related to the algebra of dual numbers